

# TRABAJO FIN DE MÁSTER

## UNIDAD DIDÁCTICA: DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

MÁSTER UNIVERSITARIO DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN  
SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN  
PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS (ESPECIALIDAD  
MATEMÁTICAS)

Autora: CRISTINA GARCÍA CASTILLO

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	2
2. FUNDAMENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	2
3. ANÁLISIS DE CONTENIDO.....	3
Estructura Conceptual.....	3
Sistemas de Representación.....	7
Fenomenología.....	11
Desarrollo Histórico.....	13
Mapa Conceptual.....	21
4. ANÁLISIS COGNITIVO.....	21
Expectativas de Aprendizaje.....	22
Limitaciones de Aprendizaje.....	24
Oportunidades de Aprendizaje.....	25
5. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.....	27
6. RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD: UNIDAD DIDÁCTICA.....	43
Sesión 1.....	43
Sesión 2.....	45
Sesión 3.....	46
Sesión 4.....	47
Sesión 5.....	48
Sesión 6.....	49
Sesión 7.....	50
Sesión 8.....	51
7. CRITERIOS DE EVALUACIÓN.....	52
8. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	53
9. BIBLIOGRAFÍA.....	56
10. ANEXO.....	57

## 1. INTRODUCCIÓN

Este documento es el trabajo fin de Máster, realizado por Cristina García Castillo, alumna del Máster Universitario de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, teniendo como director al Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática.

## 2. FUNDAMENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Este trabajo fin de Máster consiste en la elaboración de una Unidad Didáctica sobre el tema “*Divisibilidad de Números Naturales*” para el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Para ello, primero se realizará un Análisis Didáctico del mismo y finalmente se concretará en la Unidad Didáctica.

Para planificar una Unidad Didáctica es fundamental revisar la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la Comunidad Autónoma correspondiente (Rico, L.), por tanto, para la realización de esta unidad, se van a considerar los siguientes documentos:

El REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, el DECRETO 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía y la Orden ECI/2220/2007, de 21 de Julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria.

En la Orden ECI/2220/2007 aparecen los contenidos del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria de Matemáticas distribuidos en 5 bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad.

El tema de esta Unidad Didáctica, “*Divisibilidad de números naturales*”, se corresponde con el bloque Números y los contenidos sobre dicho tema que aparecen en esta Orden son los siguientes:

- Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores de un número. Uso de los criterios de divisibilidad.
- Números primos. Números compuestos. Descomposición de números en factores primos.
- Múltiplos y divisores comunes a varios números.

- Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.): procedimientos de cálculo.
- Aplicaciones de la divisibilidad y uso del m.c.d. y del m.c.m. en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.

### 3. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Este análisis se estructura en torno a tres organizadores y se concluye con un desarrollo histórico:

- ✓ Estructura Conceptual, la cuál viene determinada por aquellos contenidos, es decir, conceptos, procedimientos y relaciones, que conforman la estructura matemática correspondiente.
- ✓ Sistemas de Representación, que son aquellos conjuntos de gráficos, signos y símbolos, junto con sus reglas de procesamiento, mediante los que se piensan y hacen presentes los conceptos y procedimientos.
- ✓ Fenomenología, constituida por aquellos fenómenos de los que surgen y que dan sentido a los conceptos implicados. Las subestructuras de la estructura matemática contribuyen a identificar y organizar los fenómenos a los que dicha estructura sirve de modelo.
- ✓ Desarrollo Histórico en el que se sintetizará el origen y la evolución de los conceptos fundamentales.

#### ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Distinguimos entre el campo conceptual y el procedimental:

##### ➤ CAMPO CONCEPTUAL:

Podemos diferenciar tres niveles de conocimientos: *Hechos, Conceptos y Estructuras*.

Tenemos en primer lugar los HECHOS, como unidades de información y hay cuatro tipos: *Términos, Notaciones, Convenios y Resultados*.

- Los términos los voy a clasificar en dos grupos:
- ❖ Aquellos que los alumnos deberían conocer antes de comenzar a impartir el tema de divisibilidad y que van a ser utilizados en el mismo:
  - Unidad, doble, triple...
  - Medio, tercio, cuarto...

- Potencia, base, exponente, cuadrado, cubo...
- Producto, factor, división, dividendo, divisor, cociente, resto, división exacta, fracción...
- Mide, es medido, cabe, coincidir...

❖ Aquellos propios del tema de divisibilidad:

- Múltiplo, divisor, divisible...
- Números primos, factor, factorización y números compuestos...

• Notaciones:

- 1 a, 2 a, 3 a...

$$\begin{array}{r} D \quad | \quad d \\ \hline r \quad c \end{array} \quad D = d \cdot c + r$$

$$p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdots p_n^{c_n}$$

- $a \cdot b$ ,  $a \cdot = b$ ,  $a | b$ ...

- M.c.d., m.c.m....

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

• Convenios:

- 1 no es primo.

- 0 no es natural.

- Colocación de los números en la descomposición factorial:

$$\begin{array}{r|l} a & p_1 \\ c_1 = a : p_1 & p_2 \\ c_2 = c_1 : p_2 & p_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ p_n & p_n \\ 1 & \end{array}$$

donde  $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n$ .

- A la hora de realizar la descomposición factorial empezar por el menor primo posible y continuar de menor a mayor.
- Resultados:
  - Criterios de divisibilidad de 2, 3, 5, 9, 10 y 11.
  - Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.
  - El uno es divisor de cualquier número.
  - Todo número es divisible entre sí mismo y la unidad.
  - Si la división de a entre b es exacta, entonces a tiene dos divisores, b y el cociente.
  - Para calcular todos los divisores de un número, se va dividiendo dicho número por la serie de los números naturales hasta que el cociente sea menor o igual que el divisor.
  - Todo número tiene expresión factorial.
  - En la descomposición factorial acabamos cuando obtenemos el número 1.
  - ...

En segundo lugar tenemos los CONCEPTOS, que son el conjunto de hechos y las relaciones existentes entre ellos conectados en sistemas.

- Múltiplo, divisor.
- Número primo y compuesto.
- Factorización de un número.
- Relación de divisibilidad.
- Divisores y múltiplos comunes, M.c.d. y m.c.m.
- Medida y medibilidad.
- ...

En último lugar tenemos las ESTRUCTURAS, aquellos sistemas de conceptos conectados y las relaciones entre ellos.

En este caso, consideramos la estructura  $(\mathbb{N}, +, \times, \leq, /)$  que se trata de un conjunto parcialmente ordenado para la relación de divisibilidad. Esta elección es debida a que en 1º de E.S.O (que es el curso en que me voy a centrar a la hora de planificar el tema), sólo se estudia la divisibilidad entre Números Naturales sin incluir el cero. Consideramos que el

sistema de los números naturales tiene estructura multiplicativa, es decir, todo número tiene una expresión única como producto de factores primos.

➤ CAMPO PROCEDIMENTAL:

Diferenciamos tres niveles de conocimientos: *Destrezas, Razonamientos y Estrategias*.

Comenzamos con las DESTREZAS, que se ejecutan procesando hechos y manipulando símbolos y representaciones.

- Revertir la relación de múltiplo y divisor.
- Conocer y utilizar los criterios de divisibilidad.
- Descomponer factorialmente un número.
- Calcular múltiplos y divisores de un número.
- Calcular múltiplos y divisores comunes a varios números.
- Representar múltiplos y divisores en la recta numérica.
- Calcular el M.c.d. y el m.c.m de dos o más números.
- Calcular el M.c.d. utilizando el Algoritmo de Euclides y luego obtener el m.c.m.

Continuamos con los RAZONAMIENTOS que se ejecutan sobre conceptos y sus relaciones.

- A partir de la expresión factorial de dos o más números encontrar y justificar relaciones de divisibilidad entre ellos, obtener sus divisores y múltiplos comunes, calcular su M.c.d. y su m.c.m.
- Deductivo: Comprobación de determinadas propiedades con números concretos o demostración literal de la relación ser divisible de...
- Inductivo: Para introducir algunas propiedades relacionadas con la divisibilidad.
- Por reducción al absurdo. Se demuestran con este razonamiento: que el menor divisor de un número es primo, que la serie de los números primos es ilimitada, que la descomposición factorial es única...
- Visualizar en la recta numérica las regularidades en la obtención de múltiplos y divisores de un número y obtener gráficamente el M.c.d. y el m.c.m. Además de la resolución de problemas cíclicos.
- Figurativo: Justificar gráficamente si un número es primo o compuesto y mostrar gráficamente que 2 números tienen divisores comunes.

- Argumentos gráficos para justificar propiedades numéricas relacionadas con la divisibilidad usando cuadrículas y con puntos en una trama cuadrangular.

En último lugar tenemos las ESTRATEGIAS, las cuáles se ejecutan sobre la estructura conceptual y manipulan los diferentes sistemas de representación.

- Estimación de los resultados de una división.
- Cálculo mental de múltiplos y divisores.
- Reconocimiento de patrones numéricos entre un número y sus múltiplos y divisores.
- Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números.
- Reconocimiento de números primos y compuestos.
- Construcción de un conjunto de números con ajustes a una regla.
- Estrategias de factorización y de cálculo con la calculadora.
- Resolución de problemas.

### SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Por representación se entiende cualquier modo en que se hace presente un objeto, concepto o idea. Los sistemas de representación organizan los signos mediante los que se hacen presentes los conceptos y procedimientos, además distintos tipos de ellos aportan diferentes significados para cada concepto, y un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

Tenemos 4 sistemas de representación: *el Simbólico, Verbal, Materiales Manipulativos y Gráfico*. Pasamos a ver cada uno de ellos:

#### ➤ VERBAL Y SIMBÓLICO:

Dentro de este sistema de representación ejemplificamos:

- Los números naturales  $N: 1, 2, 3 \dots$
- Notación factorial:  $2*5, 3^2$ .
- Las relaciones aritméticas tales como por ejemplo:  $16 = 4^2$ .
- La factorización, de la cuál obtenemos el Teorema Fundamental de la Aritmética.
- El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, M.c.d. y m.c.m.



- a es divisible por b si la división de a entre b es exacta,  $a|b$   $\frac{D}{r} \frac{d}{c}$  y  $r=0$ .
- a es múltiplo de b si existe un tercer número c tal que a es igual al producto de a y b,  $a=b \cdot c \Leftrightarrow$  Existe  $c/a=b \cdot c$ .
- Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

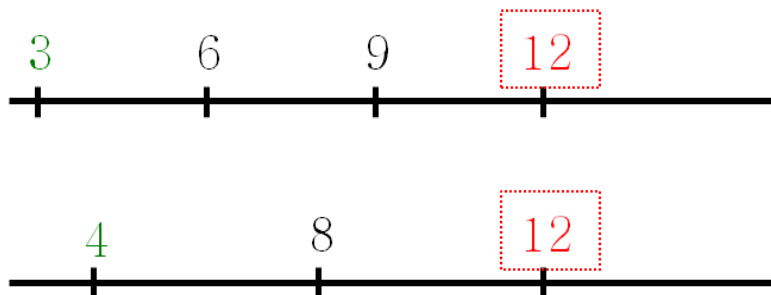
- a es divisor de b si la división de b entre a es exacta,  $a|b$   $\frac{D}{r} \frac{d}{c}$  y  $r=0$ .
- Un número divisor de otro es aquel que está contenido en el otro, un número exacto de veces.

➤ GRÁFICO:

En el tema de divisibilidad los sistemas de representación gráficos son los siguientes:

- Representaciones en la recta numérica.

Con este sistema de representación se pueden mostrar o bien sucesiones de múltiplos, el m.c.m de varios números o el M.c.d. Aquí presento un ejemplo de como visualizar que el m.c.m (3, 4)=12.



- Configuraciones puntuales.

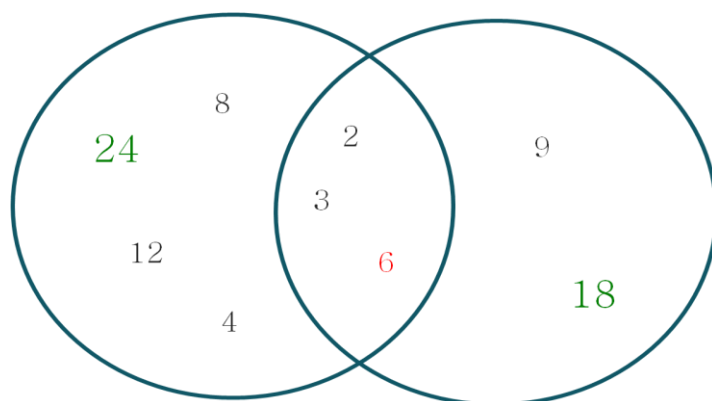
Con este sistema de representación se muestra cuando un número es primo o compuesto, ya que los que se puedan distribuir en forma de rectángulo serán compuestos y los que sólo se puedan expresar como una única línea, serán primos. Además se puede comprobar si dos números tienen divisores comunes o no, debido a que si los rectángulos formados por estos tienen alguna dimensión igual, tendrán algún divisor común y si no, pues no lo tendrán. Por ejemplo, 15 descompone como:

•••••  
 •••••  
 •••••

Esta descomposición no es única.

- Diagramas de Venn.

Con este sistema de representación se pueden mostrar tanto el m.c.m de varios números como el M.c.d. Aquí presento un ejemplo en el que se visualiza que el M.c.d.  $(24, 18)=6$ .



- Tablas numéricas.

Este sistema de representación tiene gran cantidad de usos diferentes, como reconocer patrones numéricos, obtener todos los números primos y compuestos mediante la Criba de Eratóstenes...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

➤ MATERIALES MANIPULATIVOS:

En el tema de Divisibilidad se pueden usar los siguientes materiales manipulativos:

- Regletas de Cuisenaire.



- Laberinto doble salida.



- Cartas, ¿quién tiene?



- Cuadrículas.

Se pueden usar para calcular todos los divisores de un número haciendo todas las posibles combinaciones de las cuadrículas:

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

2	3	
2	3	5

También para calcular el M.c.d, superponiendo ambas y seleccionando los factores que producen divisores comunes y para calcular el m.c.m multiplicando todos los factores que ahí aparecen.

- Software.
- Calculadora.

### FENOMENOLOGÍA

Voy a distinguir distintos tipos de fenómenos sobre el tema de Divisibilidad, cada uno de ellos viene dado en forma de pregunta:

FENÓMENOS	SUBESTRUCTURAS	CONTEXTOS
DE REPARTO: <i>Dada una cantidad de objetos discretos, ¿de cuántos modos puedo repartirlas en partes iguales?</i>	Divisores	Formas de repartir
DE MEDIDA: <i>¿Cuál(es) es (son) la(s) unidad(es) de medida que miden de modo exacto la cantidad que tengo?</i>	Divisores	Formas de medir
<i>Dadas dos o más cantidades, ¿de cuántos modos puedo repartirlas en partes de igual tamaño?</i>  <i>¿Cuál es el reparto de mayor tamaño?</i>	Divisores comunes  M.c.d.	Reparto maximizando
<i>¿Cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto las 2 o más cantidades que tengo?</i>  <i>¿Cuál es la mayor unidad de medida?</i>	Divisores comunes  M.c.d	Medidas comunes  Mayor medida común
DE REITERACIÓN: <i>¿Qué cantidades se obtienen reiterando varias veces una misma cantidad?</i>	Múltiplos	Formas de reiterar
DE PERIODICIDAD: <i>Con una unidad de medida, ¿qué otras cantidades puedo medir?</i>	Múltiplos	Periodicidad
<i>¿Cuándo coinciden las reiteraciones de dos o más cantidades?</i>  <i>¿Cuándo coinciden por vez primera?</i>	Múltiplos comunes  m.c.m.	Reiteración mínima
<i>¿Qué cantidad puedo medir exactamente con otras dos?</i>  <i>¿Y cuál es la menor cantidad que puedo medir exactamente con otras dos?</i>	Múltiplos comunes  m.c.m.	Periodicidad mínima

A continuación, presento unos ejemplos para cada tipo de situación, que podré relacionar con los fenómenos anteriores:

➤ Personal:

1. *Alberto tiene 30 CD's de música jazz y 18 de música clásica. Quiere ordenarlos en estanterías iguales de la mayor capacidad posible, sin mezclar CD's de distinto tipo y sin dejar estanterías incompletas. ¿Cuántos discos tiene que poner en cada estantería?*

Responde al fenómeno: Dadas dos o más cantidades, ¿de cuántos modos repartirlas en partes de igual tamaño? ¿Cuál es el reparto de mayor tamaño?

2. *Carlos está colocando sus cromos. Puede hacer montones de 18 y 30 sin que en ninguno de los casos sobre ninguno. ¿Cuál es el menor número de cromos que puede tener?*

Responde al fenómeno: ¿Cuándo coinciden las reiteraciones de dos o más cantidades? ¿Cuándo coinciden por vez primera?

3. *María quiere colocar 18 baldosas en filas para formar una superficie rectangular. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?*

Responde al fenómeno de medida: ¿Cuál(es) es (son) la(s) unidad(es) de medida que miden de modo exacto la cantidad que tengo?

4. *Fátima ha invitado a 10 amigos a su fiesta de cumpleaños. Después de merendar, propone un acertijo con premio: "Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Os doy tres pistas: Hay menos de cinco docenas, están ordenados en filas de nueve y si se repartieran entre todos los presentes, sobraría uno." ¿Cuántos bombones contiene la caja?*

Responde al fenómeno de reiteración: ¿Qué cantidades se obtienen reiterando varias veces una misma cantidad?

➤ Educativo o Laboral:

5. *Tengo 24 botellas de vino blanco y 18 botellas de vino rosado. Si quiero guardarlas en cajas iguales sin mezclar botellas de vinos diferentes. ¿Cuántas botellas de vino deben de caber en cada caja para que ni sobre ni falte ninguna botella?*

Responde al fenómeno: Dadas dos o más cantidades, ¿de cuántos modos puedo repartirlas en partes de igual tamaño? ¿Cuál es el reparto de mayor tamaño?

6. *Con el contenido de una garrafa de 210 litros, ¿cuántos vasos se pueden llenar teniendo cada uno de ellos la misma cantidad de líquido?*

Responde al fenómeno de reparto: Dada una cantidad de objetos discretos, ¿de cuántos modos puedo repartirlas en partes iguales?

7. *Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?*

Responde al fenómeno: ¿Cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto las 2 o más unidades que tengo? ¿Cuál es la mayor unidad de medida?

➤ Pública:

8. *Una campana tañe cada 12 minutos y otra cada 15 minutos. Si han sonado juntas a las 12, ¿a qué hora sonarán juntas de nuevo?*

Responde al fenómeno: ¿Y cuál es la menor cantidad que puedo medir exactamente con otras dos?

9. *Está previsto que asistan 120 personas a una fiesta. ¿De cuántos comensales pueden ser las mesas si todas han de ser iguales y estar completas?*

Responde al fenómeno de medida: ¿Cuál(es) es (son) la(s) unidad(es) de medida que miden de modo exacto la cantidad que tengo?

➤ Científica:

10. *Dos cometas se aproximan al Sol uno cada 25 años y otro cada 60 años. Habiéndose aproximado juntos en 1950, di la fecha más cercana en que volverán a hacerlo juntos.*

Responde al fenómeno: ¿Y cuál es la menor cantidad que puedo medir exactamente con otras dos?

## DESARROLLO HISTÓRICO

Voy a hacer un breve desarrollo histórico del origen de la divisibilidad, así como de su evolución a lo largo de los años. Para ello, haré una distinción entre cada una de las civilizaciones donde se ha llevado a cabo el estudio de este tema:

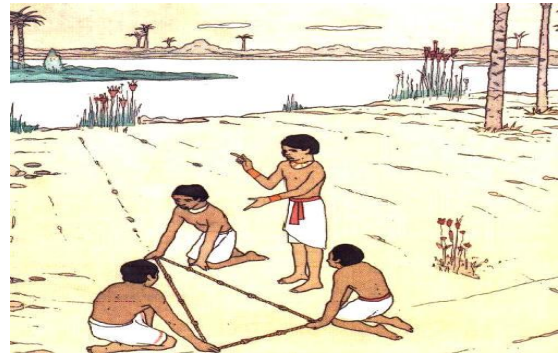
➤ PREHISTORIA

Las muescas presentes en el hueso de Ishango, que data de hace más de 20.000 años (anterior por tanto a la aparición de la escritura) y que fue hallado por el arqueólogo Jean de Heinzelin de Braucourt, parecen aislar cuatro números primos: 11, 13, 17 y 19. Algunos arqueólogos interpretan este hecho como la prueba del conocimiento de los números primos. Con todo, existen muy pocos hallazgos que permitan discernir los conocimientos que tenía realmente el hombre de aquella época.

➤ ANTIGUO EGIPTO (2000 a. c.)

Utilizan la divisibilidad como concepto de medida.

El problema que se les plantea es el de pagar los impuestos en función del área de los terrenos que riega el Nilo. A mayor área mayores impuestos. Fijada una unidad de medida intentan ver cuantas de esas unidades tiene cada terreno.



En las matemáticas egipcias, el cálculo de fracciones requería conocimientos sobre las operaciones, la división de naturales y la factorización.

➤ MESOPOTAMIA O ANTIGUA BABILONIA (1800 a. c.)

Esta civilización consigue grandes avances matemáticos. En el campo de la divisibilidad desarrollan y resuelven algunas ecuaciones diofánticas íntimamente unidas con conceptos geométricos, terreno éste, en el que también superaron a la civilización egipcia.



Numerosas tablillas de arcilla atribuidas a las civilizaciones que se fueron sucediendo en Mesopotamia a lo largo del II milenio a.C. muestran la resolución de problemas aritméticos y atestiguan los conocimientos de la época. Los cálculos requerían conocer los inversos de los naturales, que también se han hallado en tablillas. En el sistema sexagesimal que empleaban los babilonios para escribir los números, los inversos de los divisores de potencias de 60 (números regulares) se calculan fácilmente, por ejemplo, dividir entre 24 equivale a multiplicar por 150 ( $2 \times 60 + 30$ ) y correr la coma sexagesimal dos lugares. El conocimiento matemático de los babilonios necesitaba una sólida comprensión de la multiplicación, la división y la factorización de los naturales.

➤ CHINA ANTIGUA (1200 a. c. – 1300 d. c.)

En China se introducen el concepto de fracción y fracción irreducible cuando el numerador y denominador ya no tienen un divisor común. Destaca como singularidad, que en la división de fracciones se exige la previa reducción de éstas a común denominador.

Un matemático chino del siglo III de nuestra era es Suen Tseu, que estudió los problemas de congruencias, de aquí parece proceder el nombre que se da al actual “Teorema chino del resto”.



➤ INDIA ANTIGUA (s. VIII – VII a. c. en adelante)

Los primeros indicios matemáticos se calculan hacia los siglos VIII-VII a. C, centrándose en aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos, siendo evidentemente necesaria la noción de medida.

Hacia el s. XII desarrollaron métodos para resolver problemas astronómicos, de resolución de ecuaciones diofánticas.

➤ GRECIA (Hacia el s. II a. C.)

En los matemáticos de esta época los problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel.

Los pitagóricos, integrantes de una escuela filosófica de la Grecia antigua (siglo VI a. C) encontraron relaciones importantes entre los números naturales, como la divisibilidad, semilla de lo que hoy se llama Teoría de Números. Euclides, matemático griego del siglo III a. C, recopiló en el libro “*Elementos*”, los avances alcanzados hasta ese momento.



Este libro, obra monumental, e indiscutida hasta principios del siglo XX, consta de 13 libros y suele dividirse en cinco partes. Los cuatro primeros, a la geometría plana, estudio exclusivo de las figuras poligonales o circulares. La segunda parte, donde



aparece la noción de semejanza, se encuentra en el quinto libro, que trata en abstracto de relaciones y proporciones y por el VI, aplicación del anterior a la geometría plana. La teoría de números es objeto de la tercera parte y comprende los libros VII, VIII, IX. La última parte formada por los libros XI, XII, XIII, se dedica al espacio.

El libro VII, estudia los enteros, los números primos, y el concepto de mínimo común múltiplo.

En el libro VIII, se encuentran los enteros de nuevo, las progresiones aritméticas y geométricas y las raíces n-ésimas.

El libro IX, incluye proposiciones sobre lo par y lo impar, así como la famosa demostración de la existencia de infinitos números primos.

El X, el más extenso, está consagrado al estudio de las irracionales algebraicas más sencillas.

Entre los curiosos datos aritméticos que se encuentran en esa obra, aparece el método de resolución del máximo común divisor (M.c.d.), que hoy llamamos de divisiones sucesivas y proporciona un método para determinarlo, el “Algoritmo de Euclides”. Además ofreció un método para calcular el mínimo común múltiplo (m. c. m.), de dos números. Para ello, Euclides propuso la siguiente regla: “El producto de dos números dividido entre el M. c. d. de ambos números, da el mínimo común múltiplo”. Asimismo este libro contiene el “Teorema fundamental de la Aritmética”, que afirma que todo entero positivo se puede representar de forma única como producto de factores primos. Por ejemplo,  $6963 = 2^3 \times 3 \times 17^2$  y  $1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$  y la manera de construir un número perfecto a partir de un número primo de Mersenne, que serán aquellos de la forma  $2^n - 1$ .

Euclides demostró que el número de primos es infinito, además da en su demostración un algoritmo para obtenerlos llegando enseguida a números muy grandes pero no de forma ordenada. Con esto, alcanzó su máximo desarrollo la teoría de los números entre los griegos.

En esta época se estudiaban cuestiones sobre la divisibilidad de los números; fueron introducidas las proporciones aritméticas, geométricas y armónicas y diferentes medias: la aritmética, la geométrica y la armónica.

Se descubrió la irracionalidad, demostrando, por ejemplo, la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 (como medida de la diagonal del cuadrado de lado 1) por la vía de reducción al absurdo. Este descubrimiento de la irracionalidad condujo a la elaboración de la teoría de la divisibilidad.

La etapa siguiente se caracteriza por la necesidad de crear una teoría matemática general tanto para los números racionales como para los irracionales. Asimismo, el surgimiento de la irracionalidad condicionó la necesidad de creación de una teoría cuya fundamentación inicial lo constituyó el “Algoritmo de Euclides”.

Hacia el siglo III (a. C.), los griegos alcanzaron un elevado grado de abstracción en las ciencias matemáticas. La misma palabra Aritmética es de origen griego. Para ellos, esta ciencia era una rigurosa teoría de los números. Sus investigaciones los llevaron muy pronto al concepto de número primo, de donde partió Eratóstenes para descubrir su curioso método de determinación de los números primos en la serie natural. Se inventó una criba para ir obteniéndolos sin dejar ninguno. El método es muy sencillo, aunque muy lento.

#### ➤ MATEMÁTICA MODERNA

Los principios generales de divisibilidad son una consecuencia del desarrollo que había alcanzado la teoría de los números. Los hindúes, por ejemplo, llegaron a conocer la divisibilidad por tres, nueve y siete. Griegos y egipcios establecieron la clasificación de los números en pares o impares. El genial matemático francés Blas Pascal (1623-1662), propuso las reglas para determinar la divisibilidad por cualquier número.

Debido a las demostraciones de Euclides de los teoremas básicos de la divisibilidad, se le permite a Gauss en 1801, deducir el “Teorema fundamental de la Aritmética”. Más tarde, alrededor de 1875, el matemático alemán Dedekind (1831-1916), llevó a cabo la generalización de los caracteres de divisibilidad, extendiéndolos a los números racionales y a los ideales (o imaginarios). En esta época también se descubrió la identidad de Bézout (1730-1783) o Lema de Bézout que enuncia que: “Si  $a$  y  $b$  son números enteros con máximo común divisor  $d$ , entonces existen enteros  $x$  e  $y$  tales que  $ax + by = d$ ”, los números  $x$  e  $y$  pueden determinarse mediante el algoritmo extendido de Euclides, pero no se determinan de forma unívoca.

Tras la demostración de Euclides de que el número de primos es infinito, no se volvieron a hacer progresos en este campo, hasta que Fermat, en 1630-1665, propuso su teorema sobre los exponentes primos. L. S. Dickson afirma en su “*History of theory of numbers*” que los chinos ya conocían este problema en el 500 a. C., cuando el número era dos. Otros matemáticos han demostrado la infinitud de los números primos con métodos diversos e incluso hay una demostración topológica.

Con los trabajos de Fermat (1601-1665), Euler (1707-1783) y Gauss (1777- 1855) sobre la teoría de los números, se echaron las bases de la Aritmética moderna o superior. En 1850, Tchebycheff realizó un notable progreso sobre los números primos. En 1932, el francés Landau, completó el trabajo de aquel sobre la distribución de los números primos, demostrando lo que el inglés Hardy llamó teorema de Tauber.

El postulado de Bertrand (1822-1900) enuncia así:

“Si  $n$  es un número natural mayor que 3, entonces siempre existe un número primo  $p$  tal que  $n < p < 2n-2$ ”.

A pesar de que sabemos que hay infinitos números primos, aún quedan preguntas en el aire sobre procedimientos exactos para saber con certeza si un número determinado es primo o no. Por eso, la gente curiosa se preguntó si había algún algoritmo que pudiera ir generando de otra forma la lista completa de los números primos. Uno de los más curiosos es el que propone que en la expresión:  $n^2 + n + 41$ , se sustituya  $n$  por 0, 1, 2, 3, etc. y se evalúe el número que se obtiene cada vez. Por ejemplo, para  $n = 0$ , se obtiene  $0 + 0 + 41 = 41$ ; para  $n = 1$ , se obtiene  $1 + 1 + 41 = 43$ ; para  $n = 2$ , se obtiene 47; para  $n = 3$ , se llega a 53. Todos estos números (41, 43, 47, 53) son primos. Y, asombrosamente, la cosa funciona... hasta llegar a  $n = 40$ , cuando se obtiene  $40^2 + 40 + 41 = 1.681$ , que es  $41^2$ . En efecto,  $40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 81 = 40^2 + 80 + 1 = 40^2 + 2 \times 40 + 1$ , expresión que podemos reconocer como  $(40 + 1)^2$ .

Aparecen nuevos números basándose en su descomposición factorial:

**1. Números perfectos**, aquellos que cumplen que la suma de sus divisores propios es igual al número, por ejemplo,  $6=1+2+3$ .

**2. Números amigos**, parejas de números que cumplen que la suma de los divisores propios de cada uno de ellos da como resultado el otro número, por ejemplo, 220 y 284 son números amigos, ya que  $220 = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$  y  $284 = 1+2+4+71+142 = 220$ .

**3. Números deficientes**, todo número natural que cumple que la suma de sus divisores propios es menor que el propio número. Por ejemplo, 16 es un número deficiente ya que sus divisores propios son 1, 2, 4 y 8 y se cumple que  $1+2+4+8=15$ , que es menor que 16.

**4. Números abundantes**, todo número natural que cumple que la suma de sus divisores propios es mayor que el propio número. Por ejemplo, 12 es abundante ya que sus divisores son 1, 2, 3, 4 y 6 y se cumple que  $1+2+3+4+6=16$ , que es mayor que el propio 12.

**5. Números primos gemelos** que son aquellos que cumplen que son primos y la diferencia entre ellos es dos, por ejemplo, 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13.

Los matemáticos encontraron patrones o regularidades en el comportamiento de los números. Charles Goldbach (1690-1764) observó que los números naturales pares mayores que 4, pueden expresarse como la suma de dos números primos impares, así,  $6=3+3$ ,  $18=13+5$ ,  $90=43+47$ . Pierre de Fermat (1601-1665) encontró que al seleccionar un número natural cualquiera, si éste no es un cuadrado perfecto, entonces puede expresarse como la suma de dos, tres o cuatro cuadrados perfectos. Por ejemplo:  $5=1^2+2^2$ ,  $30=1^2+2^2+5^2$ ,  $79=1^2+2^2+5^2+7^2$ .

Propiedades como las anteriores que no han sido demostradas ni refutadas, se denominan conjeturas y se convierten en un reto para futuros matemáticos. Algunas de las más conocidas son:

- Conjeturas de Goldbach:

-Todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos.

Fue propuesta por Goldbach en 1742, en una carta dirigida a Euler. Ha sido comprobada hasta  $10^{14}$ , pero no se ha podido demostrar.

-Todo número impar  $N$  mayor que 5 es suma de tres primos.

Es consecuencia de la anterior. Fue demostrada por Vinogradov (para un número suficientemente grande), tiene como consecuencia que todo número par suficientemente grande es suma de a lo sumo cuatro primos)

Ramare demostró que todo número par es suma de seis o menos números primos.

El matemático chino Chen Jingrun demostró, en 1966, que en efecto, todo número par suficientemente grande puede expresarse como suma de dos primos o como la suma de un primo y de un número que es el producto de dos primos.

- Conjetura de Girard (comienzos s. XII): Todo número primo de la forma  $4n + 1$  puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados. Por ejemplo,  $5 = 4 + 1$ ;  $13 = 4 + 9$ ;  $29 = 25 + 4$ ;

Fermat, quien también demostró la conjetura anterior, adelantó a su vez unas cuantas. He aquí algunas:

- El cuadrado de todo número primo de la forma anterior:  $4n + 1$  puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados. Por ejemplo,  $5^2 = 25 = 16 + 9$ ;  $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$ ; etc.
- Ningún número primo de la forma  $4n + 3$  puede expresarse como suma de dos cuadrados.
- Si un número primo es de la forma  $6n + 1$  entonces puede expresarse de una y sólo una manera como suma de un cuadrado más el triple de otro cuadrado. Por ejemplo,  $13 = 1 + 3 \times 4$ ;  $19 = 16 + 3 \times 1$ .

Fermat dejó una multitud de conjeturas sin demostrar pero la verdaderamente productiva fue “el último teorema de Fermat”, cuyo enunciado dice: “No existen valores  $x, y, z$  tales que verifiquen la relación  $x^n + y^n = z^n$  (en la que  $x, y, z, n$  son números enteros positivos) si  $n > 2$ ”. Esta conjetura, de enunciado tan sencillo, fue

demostrada por el matemático inglés Andrew Wiles en 1994 (más de 300 años después de haber sido formulada). En 1640, Pierre de Fermat estableció (aunque sin demostración) el pequeño teorema de Fermat, que dice que: “Si  $p$  es un número primo, entonces, para cada número natural  $a$ ,  $a^p \equiv a \pmod{p}$ ”, posteriormente demostrado por Leibniz y Euler. Es posible que mucho antes se conociera un caso especial de dicho teorema en China.

Fermat conjeturó que todos los números de la forma  $2^{2^n} + 1$  eran primos (debido a lo cual se los conoce como números de Fermat) y verificó esta propiedad hasta  $n = 4$  (es decir,  $2^{16} + 1$ ). Sin embargo, el siguiente número de Fermat  $2^{32} + 1$  es compuesto (uno de sus factores primos es 641), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo aparte de los que ya conocía el propio Fermat.

La cuestión acerca de si el número 1 debe o no considerarse primo está basada en la convención. Ambas posturas tienen sus ventajas y sus inconvenientes. De hecho, hasta el siglo XIX, los matemáticos en su mayoría lo consideraban primo. Muchos trabajos matemáticos siguen siendo válidos a pesar de considerar el 1 como un número primo.

Actualmente, la comunidad matemática se inclina por no considerar a 1 en la lista de los números primos. Esta convención, por ejemplo, permite una formulación muy económica del teorema fundamental de la aritmética: «todo número natural tiene una representación única como producto de factores primos, salvo el orden». Además, los números primos tienen numerosas propiedades de las que carece el 1 tales como la relación del número con el valor correspondiente de la función  $\phi$  de Euler o la función suma de divisores.

La función  $\phi$  de Euler, es la que a cada  $n$  asocia el número de enteros positivos menores y coprimos (aquellos cuyo m.c.d es 1) con  $n$ , y las funciones  $\tau$  y  $\sigma$ , que a cada  $n$  asocian respectivamente el número de divisores de  $n$  y la suma de todos ellos. El valor de estas funciones en las potencias de números primos es

$$\begin{aligned}\varphi(p^m) &= p^m - p^{m-1}, \\ \tau(p^m) &= m + 1, \\ \sigma(p^m) &= 1 + p + p^2 + \dots + p^m.\end{aligned}$$

Gracias a la propiedad que las define, las funciones aritméticas pueden calcularse fácilmente a partir del valor que toman en las potencias de números primos. De hecho, dado un número natural  $n$  de factorización

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_a^{q_a}$$

se tiene que

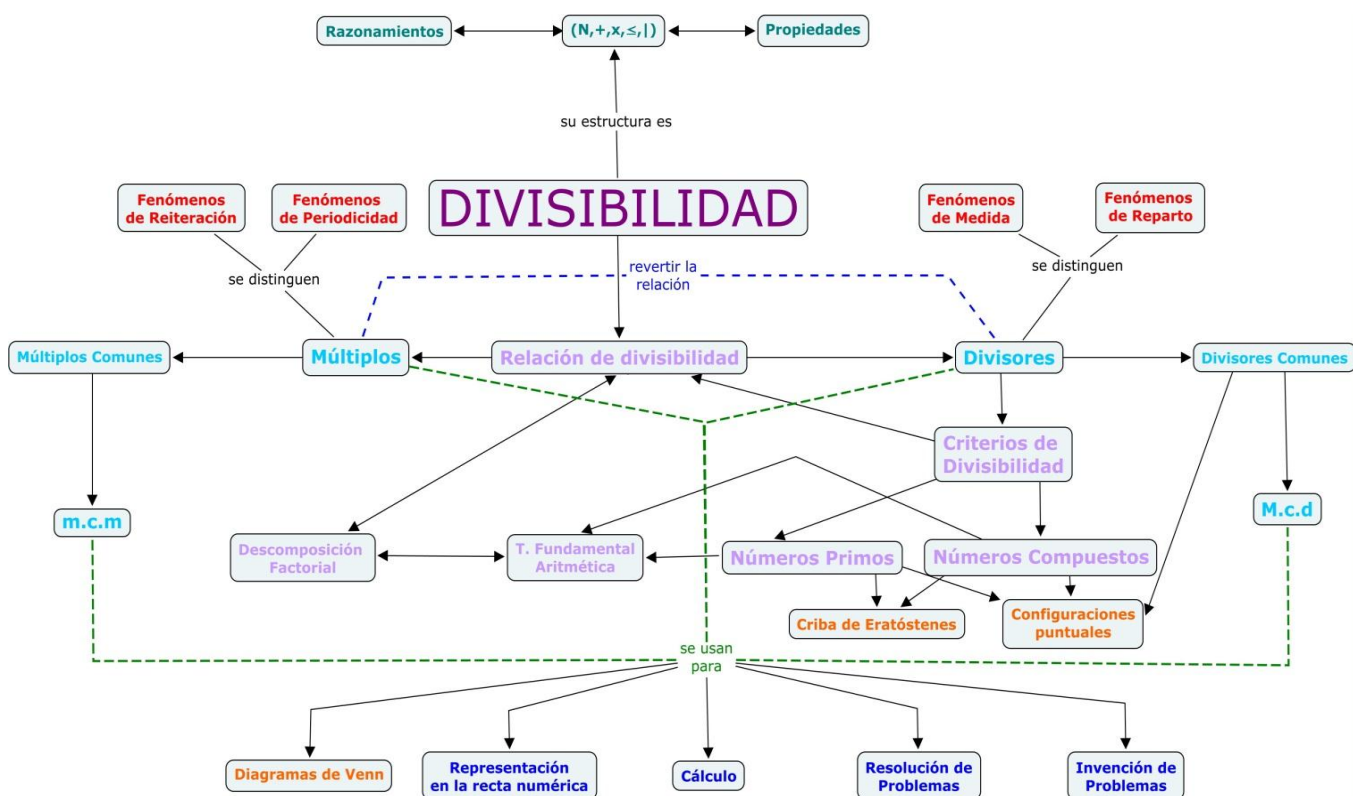
$$f(n) = f(p_1^{q_1}) \cdot \dots \cdot f(p_a^{q_a})$$

con lo que se ha reconducido el problema de calcular  $f(n)$  al de calcular  $f$  sobre las potencias de los números primos que dividen  $n$ , valores que son generalmente más fáciles de obtener mediante una fórmula general. Por ejemplo, para conocer el valor de la función  $\phi$  sobre  $n=450=2 \times 3^2 \times 5^2$  basta con calcular

$$\varphi(450) = \varphi(2) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5^2) = (2 - 1) \cdot (9 - 3) \cdot (25 - 5) = 120$$

### MAPA CONCEPTUAL

A continuación paso a elaborar un mapa conceptual en el que se resaltarán los conceptos y procedimientos más relevantes, así como las relaciones entre ellos.



## 4. ANÁLISIS COGNITIVO

En este análisis se aborda la problemática del aprendizaje de un tema por parte de los escolares. Se estructura en torno a tres organizadores:

✓ *Expectativas de Aprendizaje*, con las que se analizarán los objetivos específicos que deben desarrollar los escolares acerca de la Divisibilidad y en qué grado estos contribuirán al desarrollo de las competencias matemáticas.

✓ Limitaciones de Aprendizaje, donde se examinarán las dificultades que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje y los errores que puedan ocasionar.

✓ Oportunidades de Aprendizaje, en la que se propondrán algunas tareas que van a contribuir a que se alcancen estos objetivos y se superen esos errores y dificultades.

Voy a realizar mi Unidad Didáctica sobre el foco que relaciona los divisores, criterios de divisibilidad y M.c.d, que será llamado: *Relación de Divisibilidad. Propiedades*. Debido a que la llevaré a cabo en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, los números con los que vamos a trabajar a partir de ahora tendrán un máximo de 3 cifras y sólo un divisor primo mayor que 13.

### EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Los objetivos específicos que considero que un alumno debe alcanzar en el tema de Divisibilidad con respecto al foco en el que voy a centrarme son los siguientes:

1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.
2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad discreta o continua (cuya medida es ese número).
3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.
4. Factorizar uno o más números.
5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.
6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.
7. Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño.
8. Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común.
9. Plantear problemas en los que se calculen los divisores de un número y se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.
10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.

En la tabla siguiente se presenta en qué medida contribuyen estos objetivos a desarrollar las competencias PISA:

<b>RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD. PROPIEDADES.</b>	<b>PR</b>	<b>AJ</b>	<b>C</b>	<b>M</b>	<b>RP</b>	<b>R</b>	<b>LS</b>	<b>HT</b>
1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.		X					X	X
2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número).		X		X		X		
3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.			X				X	
4. Factorizar uno o más números.	X						X	X
5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.	X						X	
6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.	X					X	X	
7. Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño.	X			X			X	
8. Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común.	X			X			X	
9. Plantear problemas en los que se calculen los divisores de un número y se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.	X		X	X	X			
10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.			X	X	X			X

PR: Pensar y Razonar, AJ: Argumentar y Justificar, C: Comunicar, M: Modelizar, RP: Plantear y Resolver Problemas, R: Representar, LS: Uso del Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones, HT: Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas.



Si observamos esta tabla obtenemos el siguiente balance final:

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
6	2	3	5	2	2	7	3

Como se puede apreciar en la tabla anterior, las competencias que más se van a desarrollar por parte de los alumnos en este tema, el de Divisibilidad, son las de *Pensar y Razonar, Modelizar y Uso del Lenguaje Formal y Técnico y las Operaciones* debido a que es fundamental que en los primeros años de la Educación Secundaria Obligatoria y en una asignatura como Matemáticas se desarrolle esta primera competencia, además de que sepan relacionar los conceptos matemáticos con la vida cotidiana y el mundo real y conozcan el lenguaje propio de este tema.

### LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Las dificultades que considero que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los errores que puedan ocasionar y su relación con los objetivos anteriormente señalados son:

DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
D1. Conflicto entre máxima unidad y mínimo número de partes y entre mínima unidad y máximo número de partes.	6, 7, 8, 9 y 10
D2. No identificar el reparto con divisor.	2, 5 y 7
D3. Discriminación entre número primo y compuesto.	3 y 4
D4. Dificultad para demostrar propiedades de la relación de divisibilidad.	1
D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto.	4
D6. Confundir la notación científica con la notación factorial.	4
D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	1 y 3
D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.	7, 8, 9 y 10
D9. No relacionar máximo con M.c.d.	6, 7, 8, 9 y 10

ERRORES	OBJETIVOS ASOCIADOS
E1. Al calcular el M.c.d., de los factores comunes tomar no sólo aquellos que tengan el mínimo exponente, sino todos.	6, 7, 8, 9 y 10
E2. No distinguir si un problema se resuelve con M.c.d. o m.c.m.	7, 8, 9 y 10
E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.	1, 3, 4 y 5
E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.	5
E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.	4, 5 y 6
E6. Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, confundir la cifra del lugar impar y del lugar par con la cifra impar o par respectivamente.	3

### OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Paso ahora a proponer algunas tareas que van a contribuir a que se alcancen los objetivos ya señalados y con las cuáles se superen los anteriores errores y dificultades.

#### ➤ Tarea 1:

- a) Representa en una recta numérica los divisores de 15, en otra los de 30 y en la última los de 45.
- b) ¿Qué números están en las tres rectas numéricas? ¿Qué relación hay entre ellos?
- c) A partir de las rectas anteriores, ¿podrías decir cuál es M.c.d.(15,30) y el M.c.d(15, 45)? Justifica tus respuestas.

En esta primera tarea, los objetivos que se pretenden alcanzar y los errores y dificultades que se pueden detectar son los siguientes:

#### Objetivos:

- O1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.
- O3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.
- O5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.
- O6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.

#### Errores y dificultades:

- E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.
- D5. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.

- D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.
- D9. No relacionar máximo con M.c.d.

➤ **Tarea 2:**

*Un comerciante desea poner en cajas de igual tamaño 660 manzanas y 462 naranjas, de modo que cada caja contenga el mismo número de manzanas o de naranjas y, además, el mayor número posible. Hallar el número de naranjas de cada caja y el número de cajas necesarias.*

Objetivos:

- O3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.
- O4. Factorizar uno o más números.
- O6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.
- O7. Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño.
- O10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.

Errores y dificultades:

- E1. Al calcular el M.c.d., de los factores comunes tomar no sólo aquellos que tengan el mínimo exponente, sino todos.
- E2. No distinguir si un problema se resuelve con M.c.d. o m.c.m.
- E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.
- E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.
- E6. Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, confundir la cifra del lugar impar y del lugar par con la cifra impar o par respectivamente.
- D1. Conflicto entre máxima unidad y mínimo número de partes y entre mínima unidad y máximo número de partes.
- D3. Discriminación entre número primo y compuesto.
- D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto.
- D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.
- D9. No relacionar máximo con M.c.d.

➤ **Tarea 3:**

*María quiere colocar 18 baldosas en filas para formar una superficie rectangular. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?*

### Objetivos:

- O2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número).
- O5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.
- O8. Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común.
- O10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.

### Errores y dificultades:

- E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.
- D2. No identificar el reparto con divisor.
- D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.

## 5. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

En este último análisis se seleccionan, diseñan, analizan y secuencian las tareas que se van a emplear para lograr las expectativas de aprendizaje que se han concretado en el análisis cognitivo, así como, para alcanzar los objetivos ya propuestos y detectar los errores y dificultades que presentan los alumnos en el tema de Divisibilidad.

En el aprendizaje del alumno distinguimos las siguientes fases:

- ✓ Fase Inicial: Esta fase coloca al alumno en situación de aprender, comprende la presentación del tema y la recogida de información sobre las concepciones previas de los alumnos.
- ✓ Fase de Desarrollo: En esta fase se realizan las acciones que llevan al alumno a relacionarse con los contenidos matemáticos, con el fin de aprenderlos, mediante la ejecución de tareas.
- ✓ Fase de Cierre: En esta fase se estructuran y se consolidan los aprendizajes, además de examinar en qué grado se han logrado los objetivos previstos.

Las tareas que se presentan a continuación son las que he seleccionado para mi Unidad Didáctica. En el siguiente cuadro se observa las que corresponden con cada una de las fases anteriores:

FASE INICIAL	FASE DE DESARROLLO	FASE DE CIERRE
Tareas Previa y 1	Tareas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	Tarea 16 y el examen del tema

A continuación se analizan algunas de las tareas propuestas (las demás se podrán ver en el Anexo).

En la 1ª Sesión se realizará la siguiente actividad que aun no formando parte de este tema, se hará como introducción al ser contenidos que deben conocer los alumnos para los ejercicios de Divisibilidad (esta actividad no será analizada al no ser de este tema).

➤ **Tarea Previa:**

1) *Decide si las siguientes divisiones son exactas o no:*

a)  $146 : 5$       d)  $300 : 4$

b)  $630 : 3$       e)  $842 : 6$

c)  $120 : 2$       f)  $538 : 7$

2) *Expresa, si es posible, en forma de potencia:*

a)  $5.5.5.5.5$     c)  $2.7.11$

b)  $10.10.10$     d)  $3.2.3.2$

➤ **Tarea 1:**

*Responde a las siguientes cuestiones:*

b) *Haz una lista de todos los divisores de cada uno de los siguientes números: 8, 12, 16 y 17.*

c) *Justifica si 3 es divisor de 9, si 5 es divisor de 14 y si 18 es divisor de 7.*

d) *Justifica que si un número es divisible por 18 lo es también por 6. Justifica que si un número es divisible por 18 lo es también por 3.*

e) *Calcula los divisores comunes a 6, 12 y 18.*

f) *Explica cuál es el mayor divisor de un número cualquiera. Explica cuál es el menor divisor de un número cualquiera.*

g) *Completa el siguiente cuadro:*

¿Es divisor?	10	15	18	24	30
2	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
3					
4					
5					
6					
8					

Pasamos ahora a analizar esta primera tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	<p>1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.</p> <p>2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número).</p> <p>3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.</p> <p>5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.</p> <p>8. Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común.</p>	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	<p>D2. No identificar el reparto con divisor.</p> <p>D4. Dificultad para demostrar propiedades de la relación de divisibilidad.</p> <p>D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.</p>	<p>E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.</p>
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<p>Debido a que se trata de una actividad que se llevará a cabo en la fase inicial del alumno y para tener presentes los conocimientos previos de los alumnos, no se va a considerar ningún tipo de criterio de evaluación, simplemente se valorará la mejora y la evolución desde la primera vez que realicen esta tarea y la segunda.</p>	

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Calcular los divisores de una serie de números y razonar si unos números son o no divisores de otros.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel, lápiz y la tabla/ Hacer las divisiones pertinentes o usar los criterios de divisibilidad.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tareas que tienen como fin ayudar a conocer los aprendizajes previos realizados por el alumno. Tarea de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con una explicación oral de como llevar a cabo la tarea, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor reparte a cada alumno una fotocopia y explica como hacer las actividades. Esta tarea se llevará a cabo al comienzo de la unidad para tener presentes los conocimientos previos del alumno debido a que el profesor las recogerá y además volverá a realizarse en la última sesión antes del examen para valorar la evolución de los alumnos.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual.

➤ **Tarea 2:**

*Comprueba si entre estas parejas de números existe relación de divisibilidad:*

a) 500 y 20    c) 79 y 3

b) 350 y 10    d) 116 y 12

➤ **Tarea 3:**

*En una clase de 30 chicas y chicos, ¿se pueden hacer equipos de 6? ¿De cuántas personas podrían ser los equipos además de 6? Justifica tu respuesta.*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro. 2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número). 10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	AJ, C, M, RP, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D2. No identificar el reparto con divisor. D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números. D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.	E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b> 2. <b>Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros</b> , decimales y fraccionarios, <b>utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

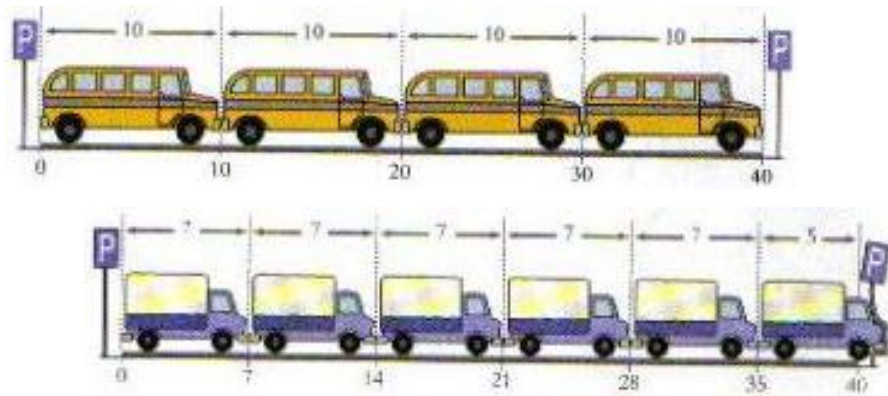
<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Comprobar si existe relación de divisibilidad entre dos números y calcular otros divisores de este número.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Hacer las divisiones pertinentes, o bien mentalmente o haciendo la división.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.



	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Personal.
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y difícil: Problema. Es una tarea de reproducción de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de elaboración y construcción de significados.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con un lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone este problema para que los alumnos la realicen en clase tras haber explicado la relación de divisibilidad entre dos número.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual pudiendo aclarar sus dudas con los compañeros e incluso el profesor.

➤ **Tarea 4:**

*De los siguientes dibujos, ¿en cuál hay relación de divisibilidad y en cuál no?  
Razona tu respuesta.*



➤ **Tarea 5:**

*Completa:*

a)  $Div(12) = \{1, \dots\}$

b)  $Div(36) = \{\dots\}$

➤ **Tarea 6:**

*Contesta verdadero o falso, y razona tus respuestas.*

a) 12 es divisor de 48.

b) 15 es divisor de 3.

c) 30 es divisor de 30.

d) 5 es divisor de 50.

e) 1 es divisor de 24.

f) 16 es divisor de 8.

➤ **Tarea 7:**

*María quiere colocar 18 baldosas en filas para formar una superficie rectangular. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número). 5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad. 8. Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común. 10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, M, RP, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D2. No identificar el reparto con divisor. D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.	E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.
	<b>1. Utilizar números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<p>2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.</p> <p>9. Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.</p>
--------------------------------	--

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Calcular todos los posibles divisores de 18 tales que el producto de dos de ellos sea ese número.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar los criterios de divisibilidad o la descomposición factorial para hacer todas las posibles combinaciones.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Personal.
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y difícil: Problema. Se trata de una tarea de conexión de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea de forma oral. Se llevará a cabo tras haber explicado como obtener los divisores de un número.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual.

➤ **Tarea 8:**

*Aplica todos los criterios de divisibilidad que conoces a los siguientes números:*

a) 33    d) 121

b) 515    e) 438

c) 900    f) 786

➤ **Tarea 9:**

a) *Usando los criterios de divisibilidad, escribe 4 números de 3 cifras que sean divisibles por 2, por 3 y por 5.*

b) *¿Estos números serán divisibles por 6? ¿Y por 15?*

➤ **Tarea 10:**

*¿Cuánto debe valer a para que el número 1a5 sea divisible entre 11? ¿Y para que lo sea entre 5? ¿Y entre 10?*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad. E6. Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, confundir la cifra del lugar impar y del lugar par con la cifra impar o par respectivamente.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Calcular unos parámetros para que una serie número cumplan unas propiedades.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar los criterios de divisibilidad y escribir números que cumplan unas determinadas propiedades.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Se trata de una tarea de conexión de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tareas de elaboración y construcción de significados.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea. Se llevará a cabo tras haber explicado los criterios de divisibilidad.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual, una vez que los alumnos hayan terminado la tarea, se la darán a otros compañeros para que se las corrijan.

➤ **Tarea 11:**

*Descompón en producto de factores primos, y escribe cómo son estos números:*

*36, 53, 97, 100, 180, 350.*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11. 4. Factorizar uno o más números.
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, C, LS, HT

	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
<b>LIMITACIONES</b>	D3. Discriminación entre número primo y compuesto. D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto. D6. Confundir la notación científica con la notación factorial.	E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad. E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b> 11. <b>Emplear los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Descomponer en factores primos unos números e indicar si son primos o compuestos.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar los criterios de divisibilidad para factorizar los números.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Se trata de una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tareas de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea. Se llevará a cabo tras haber explicado los números primos y compuestos y como factorizar un número.

<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual.
---------------------------------	--

➤ **Tarea 12:**

*La descomposición en factores primos de un número es 2.3.5. ¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y por 15? Justifica tu respuesta.*

➤ **Tarea 13:**

a) *Representa en una recta numérica los divisores de 15, en otra los de 30 y en la última los de 45.*

b) *¿Qué números están en las tres rectas numéricas? ¿Qué relación hay entre ellos?*

c) *A partir de las rectas anteriores, ¿podrías decir cuál es M.c.d(15, 30) y el M.c.d(15,45)? Justifica tus respuestas.*

➤ **Tarea 14:**

*Inventa un problema que se resuelva con el M.c.d., cuyos datos sean 660 manzanas y 462 naranjas y después resuélvelo.*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	O3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11. O4. Factorizar uno o más números. O6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial. O7. Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño. O9. Plantear problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d. O10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, M, RP, LS, HT	
	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D1. Conflicto entre máxima unidad y mínimo número de partes y entre mínima unidad y máximo número de partes.	E1. Al calcular el M.c.d., de los factores comunes tomar no sólo aquellos que tengan el mínimo exponente, sino

<p><b>LIMITACIONES</b></p>	<p>D3. Discriminación entre número primo y compuesto.  D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto.  D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.  D9. No relacionar máximo con M.c.d.</p>	<p>todos.  E2. No distinguir si un problema se resuelve con M.c.d. o m.c.m.  E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.  E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.  E6. Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, confundir la cifra del lugar impar y del lugar par con la cifra impar o par respectivamente.</p>
<p><b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b></p>	<p>1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b>, así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>  2. <b>Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros</b>, decimales y fraccionarios, <b>utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.</b>  9. <b>Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.</b>  10. <b>Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad y aplicar los conocimientos adquiridos para interpretar y tomar decisiones acerca de situaciones reales que exigen herramientas matemáticas en su tratamiento y, en su caso, para su resolución.</b>  11. <b>Emplear los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.</b></p>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<p><b>ELEM ENTOS DE</b></p>	<p><b>META</b></p>	<p>Dados unos datos, inventar un problema que se resuelva con el M.c.d.</p>
	<p><b>RECURSOS/ OPERACIONES</b></p>	<p>Papel y lápiz / Invención de un problema y cálculo de su M.c.d.</p>



	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores y M.c.d.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral.
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta abierta y accesible: Exploración. Se trata de una tarea de reflexión de nivel 2.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de descontextualización y de aplicación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia cultural y artística. Tratamiento de la información y competencia digital. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con explicación oral de la tarea, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor explica como hacer la actividad. Esta tarea se llevará a cabo tras haber explicado como obtener el M.c.d y como aplicarlo para la resolución de problemas.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual.

➤ **Tarea 15:**

*Julia tiene 135 cuentas amarillas, 150 rojas y 180 verdes. Quiere hacer el mayor número posible de collares iguales, es decir, cada color se tiene que repetir el mismo número de veces en cada collar.*

a) *¿Cuántos collares puede confeccionar sin que le sobre ninguna cuenta?*

b) *¿Cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar?*

c) *Si hiciera lo mismo sin usar las amarillas, ¿obtendría más o menos collares? Justifica tu respuesta.*

➤ **Tarea 16:**

*El restaurante “El glotón” debe preparar la sala para la Cena de Gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos.*

*¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores? Indicad vuestras soluciones y explicad cómo las habéis hallado.*

Para finalizar este análisis, voy a realizar un balance de las tareas propuestas en la Unidad Didáctica (que serán las anteriormente analizadas y las que aparecen en el Anexo) con los Objetivos, Competencias Pisa, Dificultades y Errores:

OBJETIVOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
1	X	X	X	X		X							X			X	7
2	X	X	X	X			X										5
3	X							X	X	X	X		X	X	X	X	9
4											X	X		X	X		4
5	X				X		X						X			X	5
6													X	X	X		3
7														X	X		2
8	X						X										2
9														X			1
10			X				X							X	X	X	5

Por tanto, las tareas que forman parte de la Unidad Didáctica servirán para alcanzar todos los objetivos propuestos.

Los objetivos más frecuentes son el número 1: Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro y el 3: Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.

Y los menos frecuentes son el 7: Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño, el 8: Determinar cuáles son las unidades de medida que miden de modo exacto dos o más cantidades y cuál es la mayor unidad de medida común y el 9: Plantear problemas en los que se calculen los divisores de un número y se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.

COMPETENCIAS PISA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
Pensar y Razonar	X			X		X	X		X	X	X		X	X	X	X	11
Argumentar y Justificar	X	X	X	X		X	X					X	X		X	X	10
Comunicar	X	X	X	X		X		X	X	X	X		X			X	11
Modelizar			X				X							X	X	X	5
Resolver Problemas			X				X							X	X	X	5
Representar													X				1
Lenguaje Simbólico	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			14
Herramientas Tecnológicas		X									X			X	X		4

Además, estas tareas contribuyen en mayor o menor medida (como se puede observar en la tabla anterior) al desarrollo de las Competencias Pisa.

DIFICULTADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
1															X	X	2
2	X	X	X	X		X	X										6
3											X			X	X	X	4
4	X								X					X			3
5											X	X	X		X	X	5
6											X	X		X			3
7	X	X	X	X		X			X	X				X			8
8			X				X						X		X	X	5
9													X	X	X	X	4

ERRORES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
1															X	X	2
2															X	X	2
3	X							X	X	X	X		X	X	X	X	9
4			X		X		X							X			4
5											X	X			X	X	4
6								X		X				X		X	4

Igualmente, con estas tareas se pueden detectar todas las dificultades y errores que se expusieron en el Análisis Cognitivo con una mayor frecuencia de las siguientes: No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números (dificultad) y entre los errores el que puede detectarse en un mayor número de ejercicios es: No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.

## 6. RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD: UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación presento la Unidad Didáctica del tema Divisibilidad, centrada en el foco: Relación de Divisibilidad. Propiedades.

### ➤ SESIÓN 1:

Esta primera sesión va a formar parte de la Fase Inicial y no se va a impartir materia, sino que se van a hacer una serie de actividades para que el profesor tenga una idea general del conocimiento de los alumnos acerca de la Divisibilidad, ya que este tema se explicó en el sexto curso de Educación Primaria.

- ❖ Al comienzo de la clase, se les preguntará a los alumnos que digan lo que recuerdan sobre el tema de Divisibilidad (10 minutos).
- ❖ Luego se les va a entregar a los alumnos la siguiente fotocopia con ejercicios sencillos sobre Divisibilidad para que hagan los que recuerden y luego los entreguen (15 minutos).

#### Tarea 1:

*Responde a las siguientes cuestiones:*

- a) Haz una lista de todos los divisores de cada uno de los siguientes números: 8, 12, 16 y 17.
- b) Justifica si 3 es divisor de 9, si 5 es divisor de 14 y si 18 es divisor de 7.

c) *Justifica que si un número es divisible por 18 lo es también por 6. Justifica que si un número es divisible por 18 lo es también por 3.*

d) *Calcula los divisores comunes a 6, 12 y 18.*

e) *Explica cuál es el mayor divisor de un número cualquiera. Explica cuál es el menor divisor de un número cualquiera.*

f) *Completa el siguiente cuadro:*

¿Es divisor?	10	15	18	24	30
2	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
3					
4					
5					
6					
8					

❖ Después procederé a repartir las Regletas de Cuisenaire por parejas, para que las trabajen y manipulen. Luego les pediré que comprueben y apunten cuáles de ellas están contenidas un número exacto de veces en una regleta de mayor tamaño y cuáles no (15 minutos).

❖ A continuación, con la intervención de profesor, se les formularán a los alumnos una serie de preguntas para ayudarles a que intuyan los conceptos de ser divisible y de divisor a través de la actividad que acaban de realizar (5 minutos).

❖ Por último, y aun no perteneciendo propiamente a este tema, se realizará la siguiente tarea, que servirá para comprobar si los alumnos recuerdan cosas necesarias para este tema y antes de finalizar la clase, saldrán un par de alumnos a la pizarra para corregirla (15 minutos).

➤ **Tarea Previa:**

1) *Decide si las siguientes divisiones son exactas o no:*

a)  $146 : 5$       d)  $300 : 4$

b)  $630 : 3$       e)  $842 : 6$

c)  $120 : 2$       f)  $538 : 7$

2) *Expresa, si es posible, en forma de potencia:*

a) 5.5.5.5.5    c) 2.7.11

b) 10.10.10    d) 3.2.3.2

➤ **SESIÓN 2:**

En la segunda sesión, teniendo en cuenta lo que conocen y recuerdan los alumnos sobre este tema y lo necesario para la comprensión de algunos conceptos y realización de tareas, comenzamos la Fase de Desarrollo, en la que se llevará a cabo la explicación del tema y la resolución de ejercicios y problemas.

❖ Se procede a explicar la relación de divisibilidad entre dos números y se ponen algunos ejemplos sobre esto (15 minutos).

❖ Se realizarán las siguientes actividades en clase (15 minutos):

**Tarea 2:**

*Comprueba si entre estas parejas de números existe relación de divisibilidad:*

a) 500 y 20    c) 79 y 3

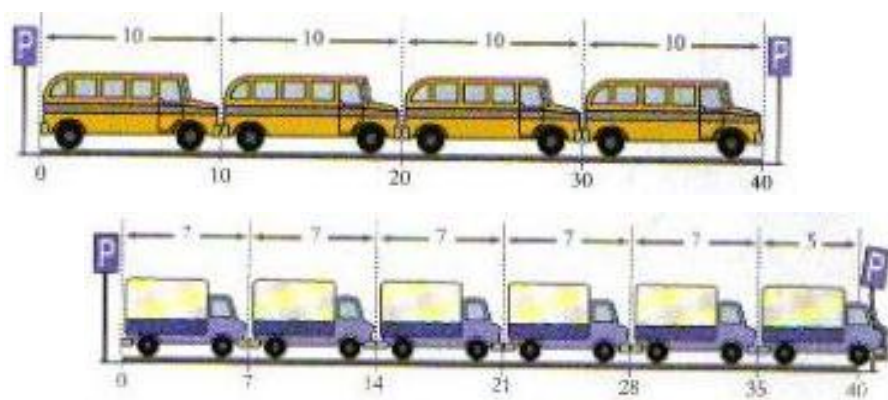
b) 350 y 10    d) 116 y 12

**Tarea 3:**

*En una clase de 30 chicas y chicos, ¿se pueden hacer equipos de 6? ¿De cuántas personas podrían ser los equipos además de 6? Justifica tu respuesta.*

**Tarea 4:**

*De los siguientes dibujos, ¿en cuál hay relación de divisibilidad y en cuál no? Razona tu respuesta.*



❖ Cuando los alumnos hayan finalizado los ejercicios, saldrán algunos a la pizarra para resolverlos y así sus compañeros comprobarán si los han realizado

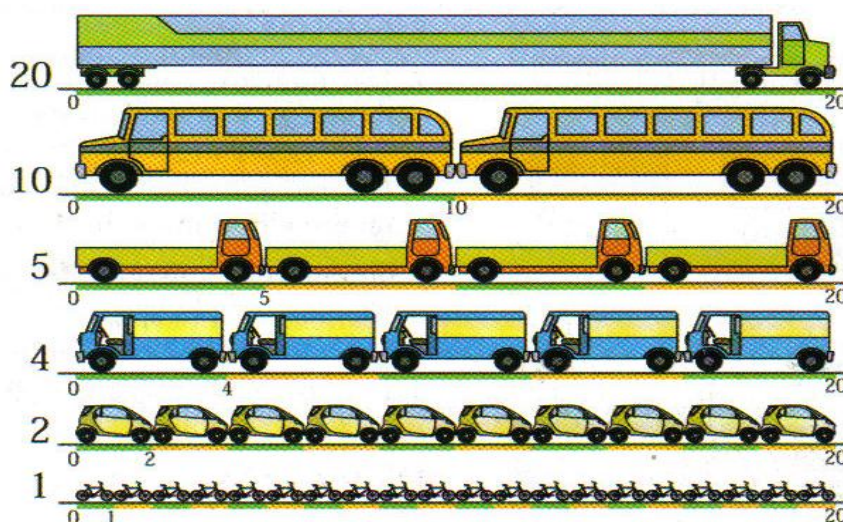
correctamente. Mientras vayan escribiendo su resolución, deberán explicarla al resto de la clase (15 minutos).

- ❖ Luego, el profesor volverá a repartir a los alumnos las regletas de Cuisenaire y también las hojas en las que escribieron en la sesión anterior cuáles de ellas están contenidas un número exacto de veces en una regleta de mayor tamaño y cuáles no. Las fotocopias serán repartidas aleatoriamente de manera que cada estudiante corrija la de otro compañero (10 minutos).
- ❖ En los últimos 5 minutos de la sesión, se mandan algunos ejercicios para hacer en casa, los cuáles serán similares a los realizados en la clase.

### ➤ SESIÓN 3:

En esta sesión continuamos con la Fase de Desarrollo.

- ❖ Salen a la pizarra algunos alumnos para corregir los ejercicios propuestos la clase anterior (10 minutos).
- ❖ Se procede a explicar como obtener todos los divisores de un número y el profesor hace algunos ejemplos en la pizarra. Además les reparte a los alumnos una fotocopia en la que aparece el siguiente dibujo para que los alumnos vean una manera de representar los divisores de 20 (15 minutos).



- ❖ Se realizarán las siguientes actividades en clase (20 minutos):

#### Tarea 5:

Completa:

a)  $Div(12) = \{1, \dots\}$

b)  $Div(36) = \{\dots\}$

**Tarea 6:**

*Contesta verdadero o falso, y razona tus respuestas.*

a) 12 es divisor de 48.

b) 15 es divisor de 3.

c) 30 es divisor de 30.

d) 5 es divisor de 50.

e) 1 es divisor de 24.

f) 16 es divisor de 8.

**Tarea 7:**

*María quiere colocar 18 baldosas en filas para formar una superficie rectangular. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? Anota todas las posibles opciones.*

- ❖ Algunos alumnos saldrán a la pizarra para corregir los ejercicios y los explicarán al resto de la clase (15 minutos).

➤ **SESIÓN 4:**

Continuamos con la Fase de Desarrollo.

- ❖ Se proceden a explicar los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5, 9, 10 y 11. Además el profesor realiza en la pizarra algunos ejemplos usando estos criterios (15 minutos).
- ❖ Se realizarán las siguientes actividades en clase (20 minutos):

**Tarea 8:**

*Aplica todos los criterios de divisibilidad que conoces a los siguientes números:*

a) 33    d) 121

b) 515    e) 438

c) 900    f) 786



**Tarea 9:**

- a) *Usando los criterios de divisibilidad, escribe 4 números de 3 cifras que sean divisibles por 2, por 3 y por 5.*
- b) *¿Estos números serán divisibles por 6? ¿Y por 15?*

**Tarea 10:**

*¿Cuánto debe valer a para que el número  $1a5$  sea divisible entre 11? ¿Y para que lo sea entre 5? ¿Y entre 10?*

- ❖ *Ahora se le reparte a los alumnos, en grupos de 4, una fotocopia con la tabla-100, para que usando los criterios de divisibilidad, vayan tachando aquellos números que sean divisibles por algún otro número (15 minutos).*
- ❖ *A continuación, el profesor explica a los alumnos que los números que no han sido tachados se llaman números primos y los demás se llaman números compuestos (10 minutos).*

**➤ SESIÓN 5:**

Seguimos con la Fase de Desarrollo.

- ❖ *Al principio de la clase unos alumnos corrigen en la pizarra los ejercicios propuestos sobre criterios de divisibilidad (10 minutos).*
- ❖ *Ahora el profesor explica como poniendo un número usando la configuración puntual se puede saber si es primo o compuesto y propone a los alumnos que lo comprueben con los números: 8, 11 y 20 (10 minutos).*
- ❖ *Luego se explica la factorización de número y se realizan algunos ejemplos en pizarra (15 minutos).*
- ❖ *Se realizarán las siguientes actividades en clase (10 minutos):*

**Tarea 11:**

*Descompón en producto de factores primos, y escribe cómo son estos números:*

*36, 53, 97, 100, 180, 350.*

**Tarea 12:**

*La descomposición en factores primos de un número es 2.3.5. ¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y por 15?*

- ❖ Para finalizar la sesión, el profesor explica como obtener todos los divisores de un número usando las cuadrículas, para esto hace un ejemplo en la pizarra y a continuación, les propone a los alumnos que calculen todos los divisores de 180 usando este método (15 minutos).

➤ **SESIÓN 6:**

Con esta sesión termina la Fase de Desarrollo.

- ❖ Primero unos alumnos corrigen en la pizarra los ejercicios propuestos la clase anterior (10 minutos).
- ❖ Luego se explica como obtener el máximo común divisor de dos o más números y la aplicación de éste a la resolución de problemas (10 minutos).
- ❖ Se realizarán las siguientes actividades en clase. La primeras se hará por parejas (20 minutos):

**Tarea 13:**

- Representa en una recta numérica los divisores de 15, en otra los de 30 y en la última los de 45.*
- ¿Qué números están en las tres rectas numéricas? ¿Qué relación hay entre ellos?*
- A partir de las rectas anteriores, ¿podrías decir cuál es  $M.c.d(15, 30)$  y el  $M.c.d(15,45)$ ? Justifica tus respuestas.*

**Tarea 14:**

*Inventa un problema que se resuelva con el  $M.c.d.$  y cuyos datos sean 660 manzanas y 462 naranjas y después resuélvelo.*

**Tarea 15:**

*Julia tiene 135 cuentas amarillas, 150 rojas y 180 verdes. Quiere hacer el mayor número posible de collares iguales, es decir, cada color se tiene que repetir el mismo número de veces en cada collar.*

- ¿Cuántos collares puede confeccionar sin que le sobre ninguna cuenta?*
- ¿Cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar?*
- Si hiciera lo mismo sin usar las amarillas, ¿obtendría más o menos collares? Justifica tu respuesta.*

- ❖ Para finalizar la sesión, se separan los alumnos en grupos de 5 (heterogéneos) y se les propone el siguiente problema que deberán resolver entre todos y posteriormente entregar al profesor (20 minutos).

#### **Tarea 16:**

*El restaurante “El glotón” debe preparar la sala para la Cena de Gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos.*

*¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores? Indicad vuestras soluciones y explicad cómo las habéis hallado.*

#### ➤ **SESIÓN 7:**

Ésta va a ser la última sesión antes del examen de este tema y será la primera de la Fase de Cierre. Debido a que esta Unidad Didáctica se va a llevar a cabo en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria y suponemos que los alumnos de este curso cuentan con su propio ordenador portátil, se les pedirá que lleven uno para cada dos personas para utilizarlo en clase.

- ❖ Al principio de la sesión, unos alumnos corregirán los ejercicios sobre M.c.d. en la pizarra (15 minutos).
- ❖ Luego, se les entregará a los alumnos la tarea 1, para que la realicen de nuevo y valorar en que medida han mejorado y tener en cuenta su evolución cuando evalúe este tema, para ello se procederá a recoger esta hoja (15 minutos).
- ❖ Tras la realización de esta actividad, los alumnos deben entrar el siguiente enlace (30 minutos):

<http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285579012/contido/index.html>

En este enlace hay una serie de ejercicios sobre Divisibilidad para que los alumnos practiquen y al mismo tiempo se diviertan.

(Sólo se harán aquellos ejercicios que correspondan al foco en el que yo me estoy basando para realizar esta Unidad Didáctica, es decir, concepto de divisor, cálculo de divisores, números primos y reglas de divisibilidad).

➤ **SESIÓN 8:**

Esta sesión va a ser la última de mi Unidad Didáctica, corresponde con la del examen y con ella concluirá la Fase de Cierre.

**Nombre:** .....

**Apellidos:**.....

**Ejercicio 1:** (2 puntos)

*José está haciendo una colección de cromos. Los cromos se venden en sobres con 5 cromos cada uno. ¿Puede comprar 15 cromos? ¿Y 17?*

**Ejercicio 2:** (2 puntos, 1 el apartado 1) y otro el apartado 2))

1) *Completa los siguientes números, para que:*

a) *35\_ sea divisible por 2.*

b) *\_31 sea divisible por 3.*

c) *84\_ sea divisible por 5.*

d) *47\_ sea divisible por 9.*

e) *1\_3 sea divisible por 11.*

2) *Escribe razonadamente todos los números primos que haya entre 30 y 60.*

**Ejercicio 3:** (2 puntos)

*Carmen cuenta sus 24 coches de juguete de 3 en 3 y Alberto lo hace de 4 en 4. ¿Coinciden en algún número? ¿Qué tienen en común dichos números?*

**Ejercicio 4:** (2 puntos)

*Un carpintero corta una tabla de 48 cm de largo y 32 cm de ancho, sin que le sobre madera, en cuadrados iguales lo más grandes posible. ¿Cómo lo ha hecho?*

**Ejercicio 5:** (2 puntos)

*Antonio tiene 40 sellos de Europa y 56 de Asia. Quiere hacer el mínimo número posible de lotes iguales, sin mezclar sellos de Europa y Asia y sin que le sobre ninguno. ¿Cuántos lotes hará? ¿Cuántos sellos tendrá cada lote?*

## 7. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La evaluación que realiza el profesor en el aula se propone determinar, mediante la recopilación y el análisis sistemático de datos, hasta qué grado se han cumplido las expectativas de aprendizaje establecidas al inicio del proceso de enseñanza aprendizaje y cómo pueden mejorarse sus resultados. Un proceso evaluativo proporciona datos para dictaminar el logro de los objetivos propuestos por parte de los estudiantes participantes y usa ese diagnóstico para mejorar las actividades subsiguientes con los mismos u otros participantes. Evaluar es, de manera sucinta, recoger y sistematizar información para tomar decisiones.

Una evaluación dirigida al desarrollo de las competencias matemáticas específicas ha de permear todas las fases del proceso de enseñanza y aprendizaje en sus etapas inicial, intermedia y final.

Las actividades evaluativas planteadas al inicio del proceso servirán para identificar los conocimientos previos de cada alumno y adaptar a este estado la planificación docente.

La evaluación continua, que se realiza a lo largo del proceso, contribuye a identificar las dificultades y el progreso de los alumnos y permite al profesor adaptar y regular el proceso de su aprendizaje. Se propone en esta etapa utilizar instrumentos de autorregulación que lleven al alumno a reflexionar sobre su propio aprendizaje contribuyendo así al desarrollo de la competencia matemática.

La evaluación realizada al final del proceso, por su parte, tiene como fin determinar el estado del logro de los objetivos propuestos al principio de la unidad o del curso. Sólo cuando la evaluación se integra en el proceso de enseñanza aprendizaje de manera continua, mejoran los resultados finales. (Caraballo, R.; Lupiáñez, J. L y Rico, L).

Por tanto, la evaluación que llevaré a cabo en esta Unidad Didáctica, será una evaluación formativa, constituida por tres evaluaciones:

- *Evaluación Inicial*, que corresponde con la 1ª Sesión, debido a que en ésta se identifican los conocimientos previos de los alumnos y así el profesor puede adaptar la planificación.
- *Evaluación Continua*, abarca todas las sesiones de la Unidad Didáctica porque en cada una de ellas se identifican las dificultades y el progreso de los alumnos y así le permite al profesor adaptar y regular el proceso de aprendizaje.
- *Evaluación Final*, corresponde con las dos últimas sesiones, tanto la de las actividades que los alumnos realizarán con el ordenador, en las que el profesor valorará como estos se desenvuelven a la hora de realizar las tareas, como la tarea 1, en la que se comprobará como los estudiantes han evolucionado desde la primera

vez que hicieron esta actividad hasta ahora y por supuesto, se valorará el examen del tema. Con estas actividades, se podrá observar si se han cumplido los objetivos propuestos al principio de la unidad y si han mejorado los resultados de los alumnos.

Se valorará con un 50% el examen, con un 40% el trabajo en clase y el cuaderno y con un 10% la actitud en clase.

## 8. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Según aparece en el Artículo 12. Atención a la diversidad del REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria:

1. La Educación Secundaria Obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las competencias básicas y los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.
2. Las administraciones educativas regularán las diferentes medidas de atención a la diversidad, organizativas y curriculares, que permitan a los centros, en el ejercicio de su autonomía, una organización de las enseñanzas adecuada a las características de su alumnado.
3. Entre estas medidas se contemplarán los agrupamientos flexibles, el apoyo en grupos ordinarios, los desdoblamientos de grupo, la oferta de materias optativas, las medidas de refuerzo, las adaptaciones del currículo, la integración de materias en ámbitos, los programas de diversificación curricular y otros programas de tratamiento personalizado para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.
5. Las administraciones educativas, con el fin de facilitar la accesibilidad al currículo, establecerán los procedimientos oportunos cuando sea necesario realizar adaptaciones que se aparten significativamente de los contenidos y criterios de evaluación del currículo, a fin de atender al alumnado con necesidades educativas especiales que las precisen, a los que se refiere el artículo 73 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de Mayo, de Educación. Dichas adaptaciones se realizarán buscando el máximo desarrollo posible de las competencias básicas; la evaluación y la promoción tomarán como referente los criterios de evaluación fijados en dichas adaptaciones.

La escolarización de estos alumnos en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en centros ordinarios podrá prolongarse un año más, siempre que ello

favorezca la obtención del título al que hace referencia el artículo 15 y sin menoscabo de lo dispuesto en el artículo 28.6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de Mayo, de Educación.

6. La escolarización del alumnado que se incorpora tardíamente al sistema educativo se realizará atendiendo a sus circunstancias, conocimientos, edad e historial académico.

Cuando presenten graves carencias en la lengua de escolarización del centro, recibirán una atención específica que será, en todo caso, simultánea a su escolarización en los grupos ordinarios, con los que compartirán el mayor tiempo posible del horario semanal.

Quienes presenten un desfase en su nivel de competencia curricular de dos o más años, podrán ser escolarizados en uno o dos cursos inferiores al que les correspondería por edad, siempre que dicha escolarización les permita completar la etapa en los límites de edad establecidos con carácter general. Para este alumnado se adoptarán las medidas de refuerzo necesarias que faciliten su integración escolar y la recuperación de su desfase y les permitan continuar con aprovechamiento sus estudios.

7. La escolarización del alumnado con altas capacidades intelectuales, identificando como tal por el personal con la debida cualificación y en los términos que determinen las administraciones educativas, se flexibilizará, en los términos que determina la normativa vigente, de forma que pueda anticiparse su incorporación a la etapa o reducirse la duración de la misma, cuando se prevea que es lo más adecuado para el desarrollo de su equilibrio personal y su socialización.

Si estudiamos concretamente la atención a la diversidad para el tema de Divisibilidad, debemos tener en cuenta que el concepto de divisibilidad requiere dominar la multiplicación, división y potenciación de números naturales. Es fundamental dedicar el tiempo necesario a la práctica de la descomposición de un número en factores primos, aplicando los criterios de divisibilidad explicados y aprendiendo a distinguir entre números primos y compuestos.

El empleo de la técnica de descomposición en factores primos de un número dado nos permite obtener los múltiplos y divisores de dicho número. El cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números será el paso siguiente. Este proceso no resultará complicado, pues se trata de aplicar, paso a paso, cada uno de los conceptos vistos durante la unidad.

Todos los conceptos que se tratan en la unidad son de gran utilidad, ya que nos sirven para transmitir e interpretar informaciones relacionadas con el entorno. Al resolver problemas de la vida real, los alumnos aplicarán de forma práctica los conceptos explicados en la unidad, por lo que es fundamental que los entiendan y practiquen.

A continuación se proponen una serie de actividades realizadas para los alumnos de atención a la diversidad. Las tres primeras son actividades de apoyo y las siguientes de refuerzo:

**Tarea 1:**

*Une con flechas cada número de la primera fila con los divisores que tengan en la segunda:*

18	24	49	27	15				
2	3	4	5	6	7	8	9	

**Tarea 2:**

*Factoriza los siguientes números: 36, 95 y 180.*

**Tarea 3:**

*Rodea con un círculo los números que sean divisibles por 2:*

6   33   58   70   49   36   112   132   145

**Tarea 4:**

*Los participantes en un desfile pueden colocarse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25; pero no pueden hacerlo de 4 en 4 ni de 9 en 9. ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 750 y 900 (sin incluirlos)?*

**Tarea 5:**

*Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:*

- *Si los envaso por docenas, me sobran 5,*
- *Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.*
- *Casi he cogido 100.*
- *¿Cuántos huevos tiene?*

**Tarea 6:**

*Una fábrica de automóviles, que trabaja día y noche, saca un coche cada 6 minutos. Si ahora son las ocho de la mañana del 30 de enero, y empieza a producir un pedido para exportación de 100 nuevos vehículos, ¿en qué fecha y hora habrá cubierto el pedido?*



## 9. BIBLIOGRAFÍA

- Camargo Uribe, L. (2004). *Alfa*, Editorial Norma.
- Maza, C. (2000). *Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*, Universidad de Sevilla.
- Rey Pastor, J.; Babini, J. *Historia de la matemática*.
- Collete, J.P. *Historia de las matemáticas*.
- Stewart, I. *De aquí al infinito*.
- Eca Universitaria de Granada. *Divisibilidad*, Editorial Síntesis.
- Gracián, E. *Los números primos: un largo camino al infinito*.
- Colera, J.; Gaztelu, I. *Matemáticas 1º E.S.O.*, Editorial Anaya.
- *Matemáticas 1º E.S.O.*, Editorial Grazaema Santillana, 2010. Proyecto: Los caminos del saber.
- Ministerio de Educación y Ciencia. REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Ministerio de Educación y Ciencia. ORDEN ECI/2220/2007, de 21 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Apuntes de la asignatura *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas* del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad Matemáticas).
- <http://www.pucpr.edu/facultad/ajunco/HIST.%20aritm..htm>
- <http://www.docstoc.com/docs/1645400/Historia-de-las-matematicas>
- <http://es.scribd.com/doc/1184224/Historia-de-las-matematicas>
- [http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_primo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo)
- <http://matematica.50webs.com/primos-de-mersenne.html>
- <http://primes.utm.edu/mersenne/index.html>
- <http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285579012/contido/index.html>

## 10. ANEXO

Aquí se analizan las tareas de la Unidad Didáctica que no han sido analizadas en el Análisis de Instrucción.

➤ **Tarea 2:**

*Comprueba si entre estas parejas de números existe relación de divisibilidad:*

c) 500 y 20    c) 79 y 3

d) 350 y 10    d) 116 y 12

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro. 2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número).	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	AJ, C, LS, HT	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D2. No identificar el reparto con divisor. D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

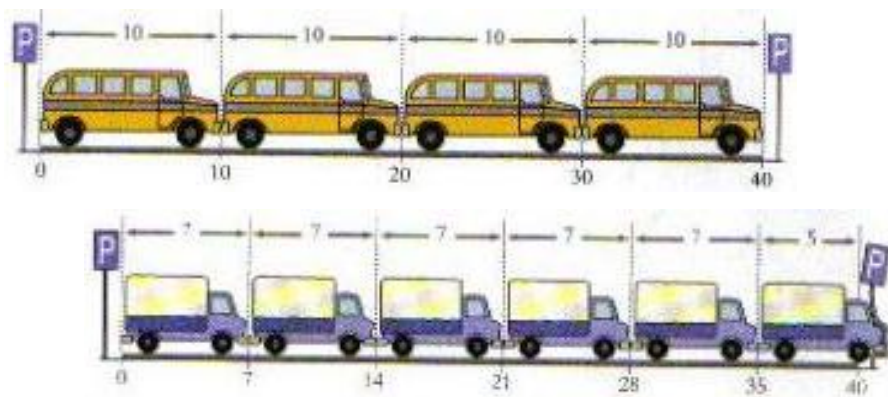
Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Comprobar si existe relación de divisibilidad entre dos números.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Hacer las divisiones pertinentes.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.

	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con un lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone esta actividad para que los alumnos la realicen en clase tras haber explicado la relación de divisibilidad entre dos números.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual.

➤ **Tarea 4:**

*De los siguientes dibujos, ¿en cuál hay relación de divisibilidad y en cuál no? Razona tu respuesta.*



Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.</li> <li>2. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad (cuya medida es ese número).</li> </ol>
------------------	--

<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D2. No identificar el reparto con divisor. D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<b>7. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Comprobar tras la observación de un dibujo si existe relación de divisibilidad.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	El dibujo / Observar los dibujos y los números que aparecen y de ahí obtener una conclusión.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de descontextualización y de aplicación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Competencia social y ciudadana.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones visuales y orales.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor reparte a los alumnos una fotocopia en la que aparece este dibujo, se llevará a cabo en la clase tras haber explicado la relación de divisibilidad entre dos números.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar por parejas.

➤ **Tarea 5:**

*Completa:*

a)  $Div(12) = \{1, \dots\}$

b)  $Div(36) = \{\dots\}$

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
		E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Calcular todos los divisores de dos números.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	El lápiz y el papel / Se podrían ir realizando las divisiones entre los números menores que ellos o usar los criterios de divisibilidad o la factorización.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.

	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, con un lenguaje matemático sencillo.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea que se realizará en clase tras haber explicado como obtener todos los divisores de un número.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual comentando con los compañeros.

➤ **Tarea 6:**

*Contesta verdadero o falso, y razona tus respuestas.*

a) 12 es divisor de 48.

b) 15 es divisor de 3.

c) 30 es divisor de 30.

d) 5 es divisor de 50.

e) 1 es divisor de 24.

f) 16 es divisor de 8.

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D2. No identificar el reparto con divisor. D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	

<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<b>1. Utilizar números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>
--------------------------------	---

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Comprobar razonadamente si unos números son divisores o no de otros.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz/ Realizar las divisiones y observar si el resto es 0.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de elaboración y construcción de significados.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, con un lenguaje matemático sencillo.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea que se realizará en clase tras haber explicado como obtener todos los divisores de un número.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual comentando con los compañeros.

➤ **Tarea 8:**

*Aplica todos los criterios de divisibilidad que conoces a los siguientes números:*

a) 33    d) 121

b) 515    e) 438

c) 900    f) 786

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
		E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.  E6. Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, confundir la cifra del lugar impar y del lugar par con la cifra impar o par respectivamente.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Comprobar si esos números son divisibles por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar los criterios de divisibilidad.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de reproducción de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de ejercitación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender.



<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, con un lenguaje matemático sencillo.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea. Se llevará a cabo tras haber explicado los criterios de divisibilidad.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual.

➤ **Tarea 9:**

a) *Usando los criterios de divisibilidad, escribe 4 números de 3 cifras que sean divisibles por 2, por 3 y por 5.*

b) *¿Estos números serán divisibles por 6? ¿Y por 15?*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, C, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D4. Dificultad para demostrar propiedades de la relación de divisibilidad. D7. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Escribir una serie número que cumplan unas relaciones de divisibilidad y a partir de éstas, comprobar si esos números son divisibles por 6 y 15.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar los criterios de divisibilidad y escribir números que cumplan unas determinadas propiedades.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de conexión de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, con un lenguaje matemático sencillo.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea. Se llevará a cabo tras haber explicado los criterios de divisibilidad.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual, una vez que los alumnos hayan terminado la tarea, se la darán a otros compañeros para que se las corrijan.

➤ **Tarea 12:**

*La descomposición en factores primos de un número es 2.3.5. ¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y por 15? Justifica tu respuesta.*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	4. Factorizar uno o más números.
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	AJ, LS

LIMITACIONES	DIFICULTADES	ERRORES
	D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto. D6. Confundir la notación científica con la notación factorial.	E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	<p>1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b>, así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b></p> <p>4. <b>Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números</b>, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.</p>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

ELEMENTOS DE LA TAREA	<b>META</b>	A partir de una factorización, obtener las de otros números.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Usar la factorización.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Es una tarea de conexión de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea exploratoria fomentadora de la interrogación y del cuestionamiento.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
CONDICIONES	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas, con un lenguaje matemático sencillo.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone a los alumnos esta tarea, la cuál se llevará a cabo tras haber explicado la factorización de un número.

	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de manera individual.
--	-----------------------------	--

➤ **Tarea 13:**

d) Representa en una recta numérica los divisores de 15, en otra los de 30 y en la última los de 45.

e) ¿Qué números están en las tres rectas numéricas? ¿Qué relación hay entre ellos?

f) A partir de las rectas anteriores, ¿podrías decir cuál es M.c.d.(15, 30) y el M.c.d.(15,45)? Justifica tus respuestas.

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	1. Dados dos números reconocer y justificar si uno de ellos es o no divisor de otro. 3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11. 5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad. 6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, C, R, LS	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D5. No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números. D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes. D9. No relacionar máximo con M.c.d.	E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	1. <b>Utilizar números naturales y enteros</b> , así como fraccionarios y decimales sencillos, <b>sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.</b> 4. <b>Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números</b> , utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.	

	<b>7. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas</b> , e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.
--	--

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Calcular los divisores de una serie de números utilizando las rectas numéricas y observar las regularidades entre ellos.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel, lápiz y las rectas numéricas/ Usar los criterios de divisibilidad y calcular mediante los números rodeados el M.c.d.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores y M.c.d.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Educativo o Laboral (debido a que la tarea se lleva a cabo en el aula).
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y accesible: Ejercicio. Los dos primeros apartados son de reproducción y el último de conexión, se trata de una tarea de nivel 0.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea exploratoria fomentadora de la interrogación y del cuestionamiento.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Tratamiento de la información y competencia digital. Competencia social y ciudadana. Competencia para aprender a aprender.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con explicación oral de la tarea, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor explica como hacer la actividad. Esta tarea se llevará a cabo tras haber explicado como obtener el M.c.d.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar por parejas, eligiendo a uno de los alumnos para que luego explique como lo han hecho.

➤ **Tarea 15:**

*Julia tiene 135 cuentas amarillas, 150 rojas y 180 verdes. Quiere hacer el mayor número posible de collares iguales, es decir, cada color se tiene que repetir el mismo número de veces en cada collar.*

a) *¿Cuántos collares puede confeccionar sin que le sobre ninguna cuenta?*

b) ¿Cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar?

c) Si hiciera lo mismo sin usar las amarillas, ¿obtendría más o menos collares?  
Justifica tu respuesta.

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	<p>O3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.</p> <p>O4. Factorizar uno o más números.</p> <p>O6. Calcular el M.c.d. de dos o más números gráficamente o mediante descomposición factorial.</p> <p>O7. Determinar de cuántos modos puedo repartir dos o más cantidades en partes de igual tamaño y cuando este reparto tendrá el mayor tamaño.</p> <p>O10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.</p>	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, M, RP, HT	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	<p>D1. Conflicto entre máxima unidad y mínimo número de partes y entre mínima unidad y máximo número de partes.</p> <p>D3. Discriminación entre número primo y compuesto.</p> <p>D5. Confundir la expresión factorial con la factorización en forma de producto.</p> <p>D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.</p> <p>D9. No relacionar máximo con M.c.d.</p>	<p>E1. Al calcular el M.c.d., de los factores comunes tomar no sólo aquellos que tengan el mínimo exponente, sino todos.</p> <p>E2. No distinguir si un problema se resuelve con M.c.d. o m.c.m.</p> <p>E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.</p> <p>E5. No realizar correctamente la descomposición factorial</p>
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<p><b>2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.</b></p> <p><b>9. Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.</b></p> <p><b>11. Emplear los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.</b></p>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículo de Secundaria de Matemáticas

Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Resolver un problema usando el M.c.d y responder a una serie de cuestiones.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Resolución de un problema usando el M.c.d.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores y M.c.d.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Personal.
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta cerrada y difícil: Problema. Se trata de una tarea de conexión de nivel 1.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de elaboración y construcción de significados. Tarea de descontextualización y de aplicación.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con explicación oral de la tarea, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone esta tarea tras haber explicado como calcular el M.c.d y como aplicarlo para la resolución de problemas.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Se va a realizar de forma individual, pudiendo comentar con algunos compañeros y preguntando las dudas al profesor.

➤ **Tarea 16:**

*El restaurante “El glotón” debe preparar la sala para la Cena de Gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos.*

*¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores? Indicad vuestras soluciones y explicad cómo las habéis hallado.*

Pasamos ahora a analizar esta tarea teniendo en cuenta el análisis cognitivo:

<b>OBJETIVOS</b>	<p>O1. Justificar la relación entre los divisores de un número con los modos de repartir en partes iguales una cantidad discreta o continua (cuya medida es ese número).</p> <p>O3. Expresar y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.</p> <p>O5. Calcular todos los divisores de un número mediante factorización o usando los criterios de divisibilidad.</p> <p>O10. Resolver problemas en los que se calculen los divisores de un número y además se usen los divisores comunes de dos o más números y su M.c.d.</p>	
<b>COMPETENCIAS PISA</b>	PR, AJ, C, M, RP	
<b>LIMITACIONES</b>	<b>DIFICULTADES</b>	<b>ERRORES</b>
	D8. No identificar situaciones en las que haya que trabajar con los divisores de un número o con sus divisores comunes.	<p>E3. No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.</p> <p>E4. No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.</p> <p>E5. No realizar correctamente la descomposición factorial.</p>
<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<p><b>2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.</b></p> <p><b>7. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</b></p> <p><b>9. Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.</b></p>	

Estos criterios de evaluación son los que aparecen en la Orden ECI 2220 del Currículum de Secundaria de Matemáticas



Y ahora veamos cuales son sus elementos y sus condiciones:

<b>ELEMENTOS DE LA TAREA</b>	<b>META</b>	Resolver un problema en el que haya que calcular los divisores de varios números y luego discriminar las soluciones obtenidas.
	<b>RECURSOS/ OPERACIONES</b>	Papel y lápiz / Calcular los divisores.
	<b>CONTENIDO</b>	Cantidad, concretamente divisores y M.c.d. Incertidumbre. Cambio y relaciones.
	<b>SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b>	Público.
	<b>COMPLEJIDAD</b>	Respuesta abierta y difícil: Investigación. Se trata de una tarea de reflexión de nivel 2.
	<b>FUNCIÓN</b>	Tarea de síntesis.
	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	Competencia lingüística. Competencia matemática. Competencia social y ciudadana. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
<b>CONDICIONES</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>	Instrucciones escritas con explicación oral de la tarea, lenguaje matemático simple.
	<b>COMUNICACIÓN (CÓMO Y CUÁNDO)</b>	El profesor propone esta tarea tras haber finalizado con la explicación de la teoría del tema.
	<b>AGRUPAMIENTO ALUMNOS</b>	Para realizar esta tarea, se pondrán los alumnos en grupos de 5 (heterogéneos) y una vez finalizada la actividad se le entregará al profesor.